

Title	函数方程式二就テ, I
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 66 p.5-p.9
Issue Date	1935-11-15
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74188
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

266. 函数方程式ニ就テ, I

福原満洲雄(北大)

§1. カウイフ表題ヲ出シタ所デ微分方程式ノ *Hatake* ヲ出ヨウトシテキルノデハナイ。微分方程式ヲ研究スルノニソノ中ダケデ *Osanari* ヲツケヨウトスルノハ無理ナ話デ、自然ニ函数方程式マデ手ヲ *nsbasu* ヲウニナルノデアル。

尙ニ *Marcel Winants* ノ論文ヲ摩ゲテ (56号) ソレニ就イテ書カウト思ッタノデアルガ、余リ日が経チ過ヤテ氣が抜ケテシマッタノデソ、儘ニナツテキル。言ヒタオッタコトハ逐次近似法ヲ *méthode merveilleuse* ナドト書イテキルカラ、サウイフ問題ナラモット樂ニ、同等又ハソレ以上ノ結果が得ラレル方法ガアルトイフコトデアッタ。逐次近似法ハ今デモ儘ニ使ハレテキル。

例ヘバ

T. Pezovitch, Sur la méthode des approximations successives d'équations différentielles (Publ. math. Univ. Belgrade). Sur la solution asymptotique d'une équation

différentielle du premier ordre (Ibid.)

ナドモサウデアルが、解ノ存在定理ヲ使フ方が逐次近似値ノ収斂性ナド=氣ヲ使フ必要ガナイノデ、ソレダケデモ樂=ナル筈デアル。解ノ存在ト單獨性トハ問題ガ自ラ別デアル。此ノ二ツヲ同時=出サウトスル、モット精密=言ヘバカウイフ解ガ存在シテ唯一ツデアルトイフ形ノ結果ヲ出サウトスルトヨイ結果ニナラナイ。存在定理ノ方ハ解ガ満足スベキ條件ヲ強クシタ方がヨイ結果=ナルが單獨性ノ方ハ反對=解ガ満足スベキ條件ヲ弱クシタ方がヨイ結果=ナルカラデアル。

ソレナラバ、ドウイフ存在定理ガアルノカトイフコト=ナルノデアルが、常微分方程式ナラバ、拙著、常微分方程式論(岩波講座)定理27デアル。此ノ定理ハ有限次元ノ空間=於ケル不動点ノ存在定理カラ導カレタモノデ、此ノ者ヘハ今デハ決シテ珍ラシイコトデハナイ。ソレデアルカラ不動点ノ存在定理カラドウイフ道筋デ函数方程式=關スル解ノ存在定理ガ導カレルカラ此處=述べヨウトハ思ハナイ。ソレヨリコノヌウ=シテ得ラレタ解ノ存在定理ノ利用價值=注目シタイノデアル。

§2. 先ヅ簡單ニ定義カラ始メル。

$a \leq t \leq b$ デ連続ナニツノ函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ガアルトキ

$$\rho(\varphi, \psi) = \max_{a \leq t \leq b} \{ |\varphi(t) - \psi(t)| \}$$

ヲニツノ函数 $\varphi(t), \psi(t)$ ノ間ノ距離ト名ヅケル。但シ函数ノ取ル値ハ複素数デモ或ハ又 n 次元ノ空間ノ *Vector* デアツテモヨイ。ソノ時ハ絶対値ハ *Vector* ノ長サトイフ意味ニ解釋スル、距離ガ定義サレレバ $a \leq t \leq b$ デ連続ナ函数ノ集合ニ点集合ニ関スル定義ヲソノママ適用スルコトガ出來ルカラ、其等ハ一々述べナイ。

例ヘバ F ガ $a \leq t \leq b$ デ連続ナ函数カラ成ル或集合デアルトキ、 F = 属スルスベテノ函数 $f(t)$ = 對シテ $|f(t)| \leq M$ デアルヤウナ有限ナ数 M ガ存在スルナラバ、 F ハ有界デアルトイフ。 F ガ次ノ性質ヲ滿タストキ星形デアルト云フ。

$f(t)$ ガ F ノ界点ナラバ $\lambda f(t)$ ハ $0 \leq \lambda < 1$ ノ時 F ノ内点、 $\lambda > 1$ ノ時 F ノ外点デアル。

$F(x, [y(t)]_a^b)$ ナル記号ハ x ト、 $a \leq t \leq b$ デ定義サレタ函数 $y(t)$ トニ依ツテ一ツノ値 F (一般ニ n 次元空間ノ *Vector*) ガ決定サレルコトヲ表ハス。 \forall $a \leq t \leq b$ デ連続ナ函数ノ或集合トシ、 I_a^b デ $a \leq t \leq b$ ナル區間ヲ表ハシタ時、 $F(x, [y(t)]_a^b)$ ガ (I_a^b, Y) デ連続デアルトハ次ノ意味デアル。

I_a^b = 属スル一ツノ數 x , Y = 属スル一ツノ函数 $y_1(t)$ 及ビ正ノ數 ε ガ與ヘラレタトキ、正ノ數 δ ヲ十分小サク取ツテ

$$|x - x_1| < \delta, \quad \rho(y, y_1) < \delta$$

デアルヤウナ I_a^b = 属スル x , Y = 属スル $y(t)$ = 對シテ

$$|F(x, [y(t)]_a^b) - F(x, [y_1(t)]_a^b)| < \varepsilon$$

が成立スルヤウニ出來ル。

此ノ定義ヲ使ヘバ先ニ引用シタ定理 27 ハモット一般ニ次ノ形ニ述べラレル。

存在定理 1. 「 $a \leq t \leq b$ デ連続ナ函数ノ或集合 Y が星形ノ, 有界ナ閉集合デ, $F(x, [y(t)]_a^b)$ が (I_a^b, Y) デ連続デ、ソレヲ x ノ函数ト考ヘタトキ ($a \leq x \leq b$ デ連続トナルコトハ明ラカデアル) Y ニ屬シ, 且ツ $\{F(x, [y(t)]_a^b)\}$ ナル函数族ガ $a \leq x \leq b$ デ同ツ程度ニ連続ナラバ函数方程式

$$y(x) = F(x, [y(t)]_a^b)$$

ハ解ヲ持ツ」

若シ考ヘル區間ガ $a < t < b$ ナラバ (a, b ハ有限デナクテモヨイ), $a < t < b$ ニ含マレル有界ナ閉區間デ Y が有界トスレバヨイ。

尚 Y が $a \leq t \leq b$ デ連続ナ函数ヲ全部含ム場合ハ北大理學部紀要 (Ser. I, Vol. II, 22-25 頁) ニ出テキル。

§ 3. 存在定理 17 種々ナ方向ニ拡張スルコトガ出來ルガ, ソレハ暫ク措イテ, $\{F(x, [y(t)]_a^b)\}$ が同程度ニ連続トイフ假定ヲ考ヘテ見ル。コレハ實ニ大キナ假定デ, 簡單ナ函数方程式ノ場合ニモ, コノ條件ヲ満たサナイモノハ幾ラモアル。ソレニモ拘ラズ微分方程式, 積分方程式ノ場合ニ

ハ満足サレル。ソコが見様=依ッテハ *omosiroi* ノデア
 ル。余リ一般ナ場合ヲ考ヘレバ *bon'yari* シタ結果シカ得
 ラレナイデアラウ。微分方程式, 積分方程式=南スル理論ヲ
 マトメテ見タイトイフ自今ノ希望=對シテハ其レ等が満足シ,
 其ノ他ノ方程式が満足シナイ重要ナ性質ヲ見ツケルコトハ大
 切ナコトデアアル。若シサウイフ性質がナカツタナラ, 其レ等
 ガケヨー纏メ=シヨウトスル企テハ大シタ意味ヲ持タナクナ
 ルカラデアアル。故ニ強イ假定ガカラト言ツテ強引=除ク必
 要ハナイデアラウ、尤モ簡單=此ノ條件ガ他ノモツト弱イ條
 件デ置換ヘラレルナラバ, ソノ方がヨイニキマツテキルガ。

ソレヨリ問題=スベキハ $F(x, [y(t)]_a^b)$ が Y =属ス
 ルトイフ假定ノ方デアアル。此ノ條件ハモツト緩イ條件デ置換
 ヘナケレバ *madui*。例ヘバ *Fredholm* ノ積分方
 程式

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt + f(x)$$

=於イテ $F(x, [y(t)]_a^b) \in Y$ ナル假定ハ入ガ小サイト
 キ=満足サレル=過ギナイカラデアアル。依ッテ此ノ假定ヲド
 ウイフ風=緩メルコトガ出來ルカヲ次ニ述ベヨウト思フ。